

OPIS ZRÓŻNICOWANIA UŚREDNIONYCH MIESIĘCZNYCH OPADÓW W WARSZAWIE I ZAKOPANEM

AVERAGE RAINFALL ASSESMENT DESCRIPTION IN WARSAW AND ZAKOPANE

Sylwester Smolik

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy opisano zmienność średnich miesięcznych opadów w Warszawie i Zakopanem na podstawie danych empirycznych z lat 1965–1990. Do opisu tej zmienności użyto sumy harmonik, bo ona najlepiej uwzględnia sezonowość z wielokrotnymi ekstremami. Udowodniono, że sumy opadów rocznych w Warszawie w wymienionym okresie maleją istotnie. Ma to duże znaczenie dla rolnictwa, gdy temperatura klimatu rośnie. Wprowadzono wzór na obliczanie średnich opadów miesięcznych od dnia t_1 do dnia t_2 , przydatny w rolnictwie, przy ogólnej postaci modelu. Sprawdzone użyteczność tego modelu na pełnych miesiącach, bo takie dane empiryczne są do dyspozycji – uzyskano bardzo dobrą zgodność. Wykazano, że ekstrema średnich miesięcznych opadów w odległych miejscowościach Polski nie są przesunięte w czasie, ale mają wyraźnie różne wartości.

Abstract. Along the paper the variability of the average monthly rainfall in Warsaw and Zakopane based on empirical data from the years 1965–1990 are described. To describe that variation of rainfall the sum of harmonics was used because it better reflects the seasonality of multiple extremes. It has been proven that the total annual rainfall in Warsaw during these periods decreases significantly. It is of great importance for agriculture, when climate and the temperature increases. Next, the formula for calculating the average monthly rainfall from day t_1 to day t_2 , useful in agriculture, was introduced, in the model way. Finally, the usefulness of this model for whole months was verified, basing on the empirical data which were available – it must be said that very good agreement was obtained. Also it has been shown that the average monthly precipitation extremes in remote locations of Poland are not postponed, but have distinctly different values.

Słowa kluczowe: opady, temperatura, rolnictwo

Key words: rainfall, temperature, agriculture

WSTĘP

Już w popularnych gazetach można przeczytać, że świat wchodzi w okres gwałtownych zmian klimatu, które wywołane są emisją gazów cieplarnianych będącą skutkiem działalności człowieka, choć nie wyklucza się też wpływu innych czynników kosmicznych. Przewiduje się większą niestabilność opadów deszczu, częściej występujące kataklizmy (takie jak susze i powodzie) oraz długofalowe wahania temperatury i opadów. Rolnictwo jest uzależnione od umiarkowanych opadów deszczu. Ich zbyt małe ilości spowodują usychanie roślin, a gwałtowne ulewy wyflukują ziemię wraz z uprawami, niszcząc plony. Przesunięcia opadów w czasie i zmienna ich ilość w poszczególnych miesiącach powodują zmiany w sezonowości przepływów rzecznych. Z kolei rzeki w trakcie wylewów powodują bardzo duże szkody materialne u rolników i w infrastrukturze danego terenu oraz komplikują transport rzeczny. W warunkach Polski opady są kapryśną zmienną losową. Dlatego przeanalizowane tu zostaną wymienione wyżej ich aspekty w dłuższym okresie, w latach 1965–1990 dla ważnych i odległych miejscowości: Warszawy i Zakopanego. Zjawisko opadów atmosferycznych można modelować na różne sposoby. W niniejszej pracy wprowadzony zostanie do opisu opadów model wielomianu trygonometrycznego (co stanowi nowość), szczególnie przydatny przy ujmowaniu bardziej skomplikowanych zależności statystycznych, mających wiele ekstremów, co, jak się okazuje, ma miejsce w tym wypadku.

MIESIĘCZNE SUMY OPADÓW W WARSZAWIE

Opady są bardzo ważnym parametrem wykorzystywanym w rolnictwie, dlatego nie należy szczędzić trudu w ciągłym doskonaleniu ich opisu i wyciąganiu ze statystyki praktycznych wniosków. Średnie opady miesięczne opisywane w mm charakteryzują się dużym zróżnicowaniem ze względu na miejsce i czas w roku. Bardzo potrzebne w gospodarce prognozy opadów na zadany przedział czasowy są zdecydowanie zawodne, dlatego zajmiemy się opisem tych zdarzeń na podstawie wielolecia. W Warszawie w latach 1965–1990 opady miesięczne kształtowały się zgodnie z tabelą 1.

Tabela 1. Miesięczne sumy opadów atmosferycznych w Warszawie (Okęcie), mm
Table 1. Total monthly precipitation in Warsaw (Okęcie), mm

t	Rok Year	Miesiąc – Month												Suma
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1	1965	33	33	16	43	104	76	133	96	52	7	47	56	696
2	1966	21	26	27	23	63	57	88	58	45	71	74	55	608
3	1967	33	51	57	64	40	82	17	45	18	26	28	57	518
4	1968	43	21	18	25	86	67	51	4	33	43	33	8	432
5	1969	9	14	16	24	38	65	34	89	25	20	54	23	411
6	1970	27	22	32	85	89	49	193	25	44	64	94	43	767
7	1971	25	25	26	39	46	104	23	43	59	55	28	28	501

8	1972	8	5	25	56	58	108	109	121	85	28	36	9	648
9	1973	11	33	26	30	50	92	79	25	39	63	40	32	520
10	1974	29	50	5	11	65	72	117	36	54	146	41	63	689
11	1975	25	6	32	41	35	73	96	49	24	25	13	12	431
12	1976	38	0	13	4	48	28	38	37	47	27	39	29	348
13	1977	14	57	33	35	45	24	82	179	52	9	44	21	595
14	1978	29	15	33	49	50	52	96	109	67	27	32	41	600
15	1979	39	23	26	20	16	28	99	51	34	8	44	44	432
16	1980	10	11	20	51	33	99	90	44	45	140	25	29	597
17	1981	32	14	51	16	66	142	88	66	35	54	58	35	657
18	1982	23	5	5	31	58	87	15	75	14	25	29	44	411
19	1983	38	28	47	45	78	34	37	63	13	34	16	35	468
20	1984	23	16	24	5	99	48	101	32	92	18	28	7	493
21	1985	13	20	35	37	58	74	48	59	50	23	23	67	507
22	1986	33	7	17	14	87	51	48	74	52	30	22	32	467
23	1987	14	13	23	28	60	126	63	36	30	17	45	43	498
24	1988	16	32	44	5	31	102	64	78	17	4	47	43	483
25	1989	16	21	14	55	26	114	46	51	28	42	33	37	483
26	1990	10	22	26	46	23	39	63	70	77	13	49	16	454
351	Suma 26 mies.	612	570	691	882	1452	1893	1918	1615	1131	1019	1022	909	13714

Opracowano na podstawie: Roczniki statystyczne z lat 1966–1991.

W pierwszej kolejności należy sprawdzić, czy wśród 26 lat opadowych w Warszawie ma miejsce regresja liniowa. W tym celu obliczymy skorelowanie zmiennych t i P (opadów rocznych).

$$\text{cov}(t, P) = \sum_{t=1}^{26} t p_t - \bar{t} \cdot \sum_{t=1}^{26} P_t = 178361 - 13,5 \cdot 13714 = -6778$$

$$\text{var}(t) = \sum_{t=1}^{26} (t - \bar{t})^2 = \sum_{t=1}^{26} t^2 - \bar{t} \cdot \sum_{t=1}^{26} t_t = 6201 - 13,5 \cdot 351 = 1462,5$$

$$\text{var}(P) = \sum_{t=1}^{26} P_t^2 - \bar{P} \cdot \sum_{t=1}^{26} P_t = 7504666 - (13714)^2 / 26 = 271058,46$$

$$r = \frac{\text{cov}(t, P)}{\sqrt{\text{var}(t) \cdot \text{var}(P)}} = \frac{-6778}{\sqrt{1462,5 \cdot 271058,46}} \approx -0,340$$

Zbadamy, czy otrzymany z próby współczynnik korelacji r jest istotnie mniejszy od zera.

$$H_0: \rho = 0 \text{ wobec hipotezy alternatywnej } H_1: \rho < 0 \text{ przy } \alpha = 0,05; t_{\text{emp}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} = \\ = \frac{-0,34}{\sqrt{1-(-0,34)^2}} \sqrt{26-2} \approx -1,7712.$$

Ponieważ $t_{\text{emp}} = -1,7712 < -1,7109 = t_{\alpha}$ (statystyka empiryczna trafia do obszaru krytycznego), dlatego na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę H_0 należy odrzucić na korzyść jej alternatywy H_1 . Tym samym stwierdzamy, że opady w Warszawie w badanym okresie są istotnie ujemnie skorelowane z upływającym czasem, czyli są malejące – widać to też w tabeli 1. Na tej podstawie możemy wyznaczyć prostą regresji o ujemnym współczynniku regresji: $P_t = a \cdot t + b + \varepsilon_t$, w której $\hat{a} = \text{cov}(t, P) / \text{var}(t) = -6778/1462,5 \approx -4,635$; $\hat{b} = \bar{P} - \hat{a} \cdot \bar{t} = 13714/26 + 4,635 \cdot 13,5 \approx 590$. Ostatecznie przyjmujemy: $\hat{P}(t) = -4,635 \cdot t + 590$. Jeżeli współczynnik regresji z próby okaże się istotnie różny od zera, to dopiero wówczas można używać otrzymaną funkcję w prognozie badanego zjawiska. W tym celu obliczamy odchylenie średnie od prostej regresji:

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n (P_t - \hat{P}_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{26-2} \cdot 240032,34} \approx 100,01. H_0: a = 0 \text{ wobec hipotezy alternatywnej } H_1: a < 0 \text{ przy } \alpha = 0,05; t_{\text{emp}} = \frac{\hat{a} - 0}{s_t} \sqrt{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2} = \frac{-4,635}{100,01} \sqrt{1462,5} \approx -1,7724.$$

Ponieważ $t_{\text{emp}} = -1,7724 < -1,7109 = t_{\alpha}$ (wartość statystyki empirycznej trafia do obszaru krytycznego), dlatego na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę H_0 należy odrzucić na korzyść jej alternatywy H_1 . Stwierdziliśmy, że współczynnik regresji w populacji jest istotnie mniejszy od zera, z wyznaczonej regresji można korzystać – ale nie mamy takiej potrzeby, wystarczy nam że opady roczne maleją. Przy istotnym ociepleniu klimatu w Warszawie (a tak wynika z innych moich badań), jednoczesne istotne zmniejszenie opadów jest bardzo niekorzystne dla rolnictwa. Ponieważ badana zmienna P charakteryzuje się dużym rozrzutem, dlatego ograniczymy się do opisu zmienności średnich opadów miesięcznych z wielolecia (26 lat), zamieszczonych w tabeli 2.

Tabela 2. Zmienność średnich opadów miesięcznych z wielolecia w Warszawie

Table 2. The variability of the average monthly rainfall from term of years series in Warsaw

P_t , mm	23,54	21,92	26,58	33,92	55,85	72,81	73,77	62,12	43,50	39,19	39,31	34,96
t	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII

Gdy punkty te umieścimy w układzie współrzędnych (t, P) stwierdzamy, że opisująca je funkcja ma kilka ekstremów. Ponadto opady atmosferyczne charakteryzują się sezonowością. Dlatego do opisu tego zjawiska należy użyć funkcji okresowej. Ta z kolei jest rozwiązalna w szereg Fouriera, któremu nadamy postać modelu:

$$P_t = s + \sum_{k=1}^j A_k \sin(k\omega t + \theta_k) + \varepsilon_t \quad (1)$$

w którym $w = 2\pi/T$, T – okres badanego zjawiska, tym razem $T = 12$ oraz $k = 1, 2, \dots, j < T/2$. Oszacowanie parametrów modelu (1) metodą najmniejszych kwadratów opracowano w Smolik [2011: 322], przyjmują one postać:

$$\hat{s} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n P_t; \quad \hat{\theta}_k = \arctg \left[\frac{\sum_{t=1}^n P_t \cos(kwt)}{\sum_{t=1}^n P_t \sin(kwt)} \right]; \quad (2)$$

$$\hat{A}_k = \frac{2}{n} \left[\cos \hat{\theta}_k \cdot \sum_{t=1}^n P_t \sin(kwt) + \sin \hat{\theta}_k \cdot \sum_{t=1}^n P_t \cos(kwt) \right].$$

Widzimy, że model (1) jest bardzo skomplikowany, ale estymuje się go bardzo prosto, jego parametry możemy obliczać na kalkulatorze.

$$\hat{s} = 527,47 / 12 \approx 44,0 \text{ mm}; \quad \hat{\theta}_1 = \arctg[-113,09952 / (-73,212458)] \approx 0,996$$

$$\hat{A}_1 = \frac{2}{12} [0,54341036 \cdot (-73,212458) + 0,83946721 \cdot (-113,09952)] \approx -22,45$$

$$\text{var}(P) = \sum_{t=1}^{12} (P_t - \bar{P})^2 = \sum_{t=1}^{12} P_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{12} P_t \right)^2 / 12 = 3622,5502$$

Uzyskujemy pierwsze przybliżenie modelu:

$$\hat{H}_1(t) = 44,0 - 22,45 \sin \left(\frac{\pi}{6} t + 0,996 \right) \quad (3)$$

Jego dopasowanie do danych empirycznych ma postać:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{12} [P_t - \hat{H}_1(t)]^2}{\sum_{t=1}^{12} (P_t - \bar{P})^2} = 597,4133 / 3622,5502 \approx 0,165; \quad R^2 = 1 - \varphi^2 = 0,835;$$

czyli model (3) tłumaczy około 83,5% zmienności P . Jest to naszym zdaniem za mało; należy obliczyć drugą harmonikę:

$$\hat{\theta}_2 = \arctg \left(\frac{\sum_{t=1}^{12} P_t \cos \frac{\pi}{3} t}{\sum_{t=1}^{12} P_t \sin \frac{\pi}{3} t} \right) = \arctg(55,31 / 11,25833) \approx 1,370$$

$$\hat{A}_2 = \frac{2}{12} \left(\cos \hat{\theta}_2 \cdot \sum_{t=1}^{12} P_t \sin \frac{\pi}{3} t + \sin \hat{\theta}_2 \cdot \sum_{t=1}^{12} P_t \cos \frac{\pi}{3} t \right) =$$

$$= \frac{1}{6} (0,19945961 \cdot 11,25833 + 0,97990605 \cdot 55,31) \approx 9,41.$$

Ponieważ znamy dalsze obliczenia, dlatego podajemy ostateczną postać modelu:

$$\hat{P}_w(t) = 44,0 - 22,45 \sin \left(\frac{\pi}{6} t + 0,996 \right) + 9,41 \sin \left(\frac{\pi}{3} t + 1,370 \right) \text{ w mm.} \quad (4)$$

Jego dopasowanie przyjmuje postać:

$\varphi^2 = \sum_{t=1}^{12} (P_t - \hat{P}_{wt})^2 / \text{var}(P) = 66,3757 / 3622,5502 \approx 0,018$; $R^2 = 1 - \varphi^2 = 0,982$; czyli model (4) tłumaczy już około 98,2% zmienności P. Uważamy, że to dopasowanie jest wystarczające, chociaż można obliczać jeszcze następne harmoniki:

$$\hat{H}_3(t) = -3,98 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - 1,250\right).$$

Graficzny obraz znalezionej krzywej (4) zamieszczono na ryc. 1. Wydaje się, że model (4) w postaci ogólnej:

$$\hat{P}(t) = \hat{s} + \hat{A}_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \hat{\theta}_1\right) + \hat{A}_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \hat{\theta}_2\right) \quad (5)$$

może posłużyć do opisu średnich opadów w dowolnej miejscowości i w dowolnym czasie.

Dlatego da się go wykorzystać do obliczenia średnich opadów w danej miejscowości w czasie od dnia t_1 do dnia t_2 , co jest bardzo przydatne w rolnictwie (nie muszą to być pełne miesiące):

$$\begin{aligned} P(t_1; t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\hat{s} + \hat{A}_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \hat{\theta}_1\right) + \hat{A}_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \hat{\theta}_2\right) \right] dt = \\ &= \hat{s}(t_2 - t_1) + 12\hat{A}_1 / \pi \sin\left[\frac{\pi}{12}(t_1 + t_2) + \hat{\theta}_1\right] \cdot \sin\frac{\pi}{12}(t_2 - t_1) + \\ &+ 6\hat{A}_2 / \pi \sin\left[\frac{\pi}{6}(t_1 + t_2) + \hat{\theta}_2\right] \cdot \sin\frac{\pi}{6}(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (6)$$

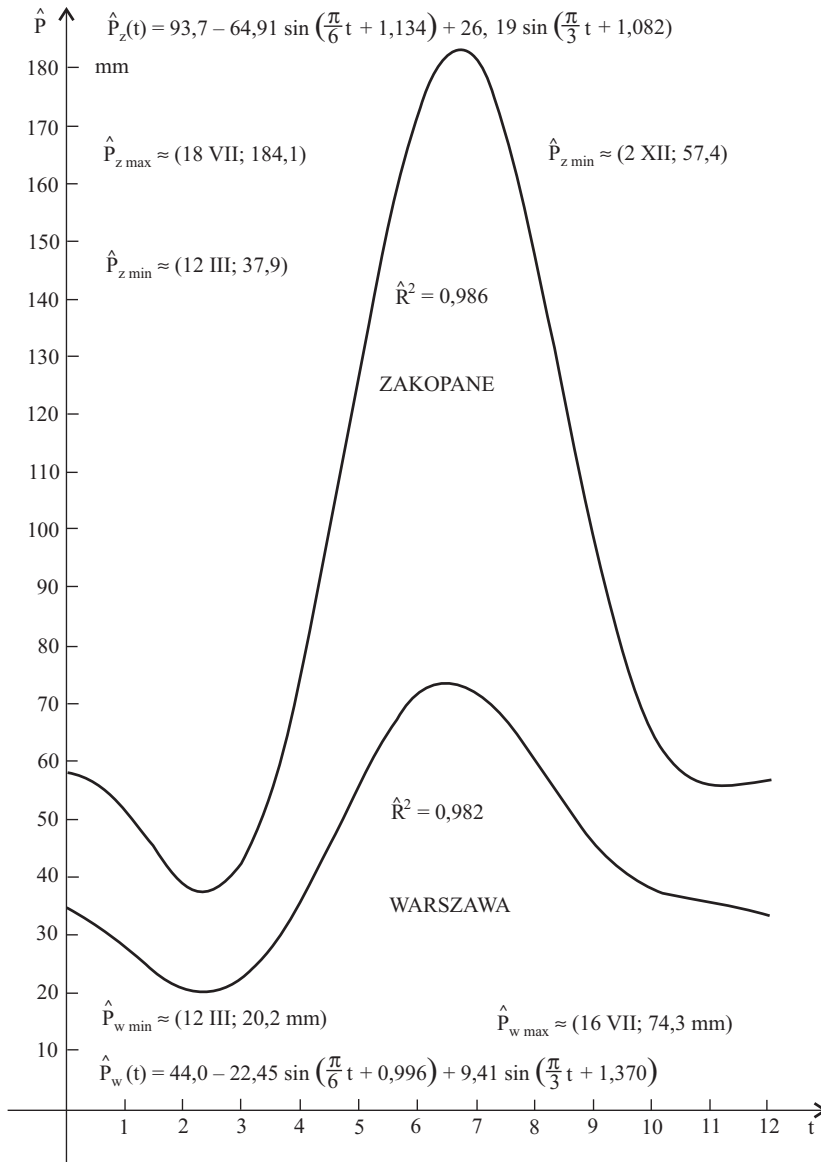
Sprawdzimy, jak związek (6) funkcjonuje dla pełnych miesięcy w Warszawie, bo takimi danymi empirycznymi dysponujemy:

$$\begin{aligned} P_w(\text{III}; \text{VIII}) &= \int_3^8 \hat{P}(t) dt = 44(8-3) + 12(-22,45) / \pi \sin\left[\frac{\pi}{12}(3+8) + 0,996\right] \cdot \sin\frac{\pi}{12}(8-3) + \\ &+ 6 \cdot 9,41 / \pi \sin\left[\frac{\pi}{6}(3+8) + 1,370\right] \cdot \sin\frac{\pi}{6}(8-3) = 282,23 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Gdy korzystamy bezpośrednio z danych empirycznych zawartych w tabeli 2, wtedy:

$$P_w(\text{IV} + \text{V} + \text{VI} + \text{VII} + \text{VIII}) = 33,92 + 55,85 + 72,81 + 73,77 + 62,12 = 298,47 \text{ mm}.$$

Stwierdzamy między tymi obliczeniami niewielką różnicę, wynika ona z stosowania w (4) procesu wyrównywania danych empirycznych.



Ryc. 1. Przebieg średnich miesięcznych opadów z lat 1965–1990 w Warszawie i Zakopanem
 Fig. 1. Average monthly rainfall from 1965–1990 in Warsaw and Zakopane

Polska nie jest rozległym krajem, ale rozsądne wydaje się pytanie, jakie są ekstrema opadów w odległych miejscowościach i czy są one przesunięte w czasie? W tym celu zbadamy przebieg średnich opadów miesięcznych w Warszawie, wykorzystując model (4).

$$\hat{P}'_w(t) = -11,754793 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + 0,996\right) + 9,854129 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + 1,370\right) \text{ oraz}$$

$$\hat{P}''_w(t) = 6,154795 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + 0,996\right) - 10,31922 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + 1,370\right)$$

$$\hat{P}'_w(t) = 0 \rightarrow (t = 1,082 \text{ lub } t = 2,387 \text{ lub } t = 6,531 \text{ lub } t = 10,936)$$

Ponieważ $[\hat{P}'_w(6,531) = 0 \text{ i } \hat{P}''_w(6,531) < 0] \rightarrow \hat{P}_{\text{wmaks}}(6,531) \approx 74,29 \text{ mm}$, czyli $\hat{P}_{\text{wmaks}} \approx (16\text{VII}; 74,3 \text{ mm})$.

Ponieważ mm, $[\hat{P}'_w(2,387) = 0 \text{ i } \hat{P}''_w(2,387) > 0] \rightarrow \hat{P}'_{\text{wmin}}(2,387) \approx 20,21$ czyli $\hat{P}_{\text{wmin}} \approx (12\text{III}; 20,2 \text{ mm})$.

Oprócz ekstremów funkcja (4) ma też dwa punkty przegięcia:

$\hat{P}_{\text{w p.przeg.}}(1,082) \approx 27,16 \text{ mm}$, czyli $\hat{P}_{\text{w p.przeg.}} \approx (2\text{II}; 27,2 \text{ mm})$; $\hat{P}_{\text{w p.przeg.}}(10,936) \approx 36,84 \text{ mm}$,
czyli $\hat{P}_{\text{w p.przeg.}} \approx (28\text{XI}; 36,8 \text{ mm})$.

Należy pamiętać o tym, że uzyskany opis opadów w średnich miesięcznych (4) ma poważną słabość. Zarejestrowane w tabeli 1 opady miesięczne obarczone są pokaznym błędem pomiaru.

MIESIĘCZNE SUMY OPADÓW W ZAKOPANEM

W Tabeli 3 podano sumy miesięcznych opadów w Zakopanem w latach 1965–1990 oraz ich sumy roczne i sumy miesięczne z wielolecia. Opiszemy sumą harmonik zmienność średniego miesięcznego opadu atmosferycznego z wielolecia (26 lat) w Zakopanem na podstawie Tabeli 4.

Tabela 3. Zmienność średnich opadów miesięcznych z wielolecia w Zakopanem

Table 3. The variability of the average monthly rainfall from term of years series in Zakopane

P_{pr} mm	45,88	40,96	49,85	77,50	126,46	180,42	168,19	156,58	98,92	64,58	57,81	57,23
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Zgodnie z przytoczonymi wzorami (2), otrzymujemy:

$$\hat{s} = 1124,38 / 12 \approx 93,7 \text{ mm} \quad \hat{\theta}_1 = \arctg[-352,83621 / (-164,840081)] \approx 1,134$$

$$\hat{A}_1 = \frac{2}{12} [0,42327318(-164,84081) + 0,90600211 \cdot (-352,83621)] \approx -64,91.$$

Pierwsza harmonika opisująca to zjawisko ma postać:

$$\hat{H}_1(t) = 93,7 - 64,91 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1,134\right) \text{ w mm.}$$

Jej dopasowanie do danych empirycznych przyjmuje wartość:

$$\text{var}(P) = \sum_{t=1}^{12} (P_t - \bar{P})^2 = \sum_{t=1}^{12} P_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{12} P_t \right)^2 / 12 = 134195,66 - (1124,38)^2 / 12 = 28843,128$$

$$\varphi^2 = \sum_{t=1}^{12} [P_t - \hat{H}_1(t)]^2 / \text{var}(P) = 3565,4828 / 28843,13 \approx 0,124; \quad R^2 = 1 - \varphi^2 = 0,876;$$

czyli $\hat{H}_1(t)$ tłumaczy 87,6% zmienności P – naszym zdaniem jest to za mało, dlatego wyznaczamy drugą harmonikę. $\hat{\theta}_2 = \arctg(138,72 / 73,837327) \approx 1,082$;

$$\hat{A}_2 = \frac{2}{12} (0,4698614 \cdot 73,837327 + 0,88274021 \cdot 138,72) \approx 26,19.$$

Tabela 4. Miesięczne sumy opadów atmosferycznych w Zakopanem, mm

Table 4. Total monthly precipitation in Zakopane, mm

t	Rok Year	Miesiąc – Month												Suma
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1	1965	52	74	58	72	155	282	118	234	104	17	40	43	1249
2	1966	43	91	81	93	219	153	169	148	46	41	63	89	1236
3	1967	51	55	84	85	118	155	143	167	84	68	33	62	1105
4	1968	52	18	31	68	116	122	229	158	109	61	34	28	1026
5	1969	31	47	17	30	69	197	124	214	17	51	60	44	901
6	1970	41	64	42	103	122	244	343	148	58	101	74	77	1417
7	1971	8	52	35	60	98	122	164	106	99	44	56	85	929
8	1972	15	19	30	131	129	200	178	323	114	45	55	6	1245
9	1973	35	78	43	100	84	325	177	70	54	29	42	36	1073
10	1974	91	17	1	53	129	296	175	192	141	136	45	86	1362
11	1975	34	33	58	105	137	213	216	163	61	87	25	53	1185
12	1976	127	4	52	64	181	99	113	93	186	31	72	81	1103
13	1977	57	77	80	93	62	216	143	119	90	14	80	47	1078
14	1978	16	28	61	112	175	156	110	179	103	80	42	31	1093
15	1979	79	14	57	65	80	204	134	129	99	65	117	58	1101
16	1980	29	34	42	107	101	157	348	134	123	228	71	62	1436
17	1981	43	28	60	24	124	165	146	212	113	78	103	76	1172
18	1982	55	26	21	88	67	105	244	78	75	21	53	111	944
19	1983	61	49	63	46	72	202	226	92	147	72	28	23	1081
20	1984	55	23	51	50	105	120	122	115	141	75	29	24	910
21	1985	24	53	48	82	130	224	156	317	36	96	56	77	1299
22	1986	62	14	18	41	168	158	98	183	35	30	27	61	895
23	1987	54	19	82	60	240	115	67	105	124	38	84	97	1085
24	1988	34	59	62	52	67	123	147	133	109	17	69	80	952
25	1989	22	54	75	108	224	271	175	169	87	78	64	20	1347
26	1990	22	35	44	123	116	67	108	90	217	76	81	31	1010
	Suma													
351	26	1193	1065	1296	2015	3288	4691	4373	4071	2572	1679	1503	1488	29234
	mies.													

Opracowano na podstawie: Roczniki statystyczne z lat 1966–1991.

Ostatecznie dla Zakopanego przyjmujemy model:

$$\hat{P}_z(t) = 93,7 - 64,91 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1,134\right) + 26,19 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + 1,082\right) \quad (7)$$

Jego dopasowanie do danych empirycznych:

$\varphi^2 = \sum_{t=1}^{12} (P_t - \hat{P}_{zt})^2 / \text{var}(P) = 396,7551 / 28843,13 \approx 0,014$; $R^2 = 1 - \varphi^2 = 0,986$; czyli model (7) tłumaczy około 98,6% zmienności P. Należy uznać, że jest to wystarczająco dobre przybliżenie. Wykres funkcji (7) z dodatkowymi informacjami zamieszczono na ryc. 1.

Sprawdzimy przydatność modelu (7) w praktyce, obliczymy przy jego pomocy średnie opady roczne w Zakopanem, wykorzystując związek ogólny (6):

$$\begin{aligned} \hat{P}_z(I; XII) &= \int_0^{12} \hat{P}_z(t) dt = 93,7(12-0) + 12(-64,91) / \pi \sin\left[\frac{\pi}{12}(0+12) + 1,134\right] \cdot \sin\frac{\pi}{12}(12-0) + \\ &+ 6 \cdot 26,19 / \pi \sin\left[\frac{\pi}{6}(0+12) + 1,082\right] \cdot \sin\frac{\pi}{6}(12-0) = 1124,4 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Skorzystawszy z danych empirycznych zawartych w tabeli 3, otrzymuje się:

$$\hat{P}_z(I + II + \dots + XII) = 29234 / 26 \approx 1124,38 \text{ mm.}$$

Zachodzi zadziwiająca zgodność wyników, mimo że model (7) wyrównuje wyniki pomiarów.

Wyznamy ekstrema funkcji (7), dlatego:

$$\hat{P}'_z(t) = -33,986796 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + 1,134\right) + 27,426104 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}t + 1,082\right) \text{ oraz}$$

$$\hat{P}''_z(t) = 64,909999 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1,134\right) - 26,19 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t + 1,082\right).$$

$$\hat{P}'_z(t) = 0 \rightarrow (t = 2,391 \text{ lub } t = 6,607 \text{ lub } t = 11,055).$$

Ponieważ $[\hat{P}'_z(2,391) = 0 \text{ i } \hat{P}''_z(2,391) > 0]$ dlatego $\hat{P}_{z\min}(2,391) \approx 37,93 \text{ mm}$; czyli

$$\hat{P}_{z\min} \approx (12 \text{ III}; 37,9 \text{ mm}).$$

Ponieważ $[\hat{P}'_z(6,607) = 0 \text{ i } \hat{P}''_z(6,607) < 0]$ dlatego $\hat{P}_{z\max}(6,607) \approx 184,1 \text{ mm}$; czyli $\hat{P}_{z\max} \approx (18 \text{ VII}; 184,1 \text{ mm}).$

Ponieważ $[\hat{P}'_z(11,055) = 0 \text{ i } \hat{P}''_z(11,055) > 0]$ dlatego $\hat{P}_{z\min}(11,055) \approx 57,39 \text{ mm}$; czyli

$$\hat{P}_{z\min} \approx (2 \text{ XII}; 57,4 \text{ mm}).$$

Stwierdziliśmy, że na podstawie danych z lat 1965–1990 średni opad roczny w Warszawie wynosił około 527,5 mm, a w Zakopanem 1124,4 mm – różnica jest bardzo

duża. Podobnie mają się względem siebie maksima średnich opadów miesięcznych, co widać na ryc. 1. Jednak terminy zjawisk ekstremalnych są bardzo bliskie, nie obserwuje się wyraźnych przesunięć opadów w czasie.

WNIOSKI Z PRZYTOCZONYCH OBLICZEŃ

Suma opadów atmosferycznych rocznych jest bardzo ważnym parametrem hydrologicznym charakteryzującym daną miejscowość. Należy ona do zmiennych losowych o dużym rozrzucie. W pracy wprowadzono nowy model, sumę harmonik do opisu zmienności średnich miesięcznych opadów z okresu 1965–1990 dla Warszawy i Zakopanego, różniących się zasadniczo pod względem tego parametru. Z przytoczonych obliczeń wnioskujemy, że i na innych stacjach meteorologicznych ten zabieg dwóch harmonik będzie skuteczny przy opisie zmienności średnich miesięcznych opadów. Mając wyznaczone modele, możemy szacować średni opad w zadanym przedziale czasowym dla tej okolicy ze wzoru (6), bardzo przydatny w rolnictwie. Wykazano, że w Warszawie w latach 1965–1990 nastąpiło istotne zmniejszenie sumy opadów rocznych. Tego samego nie możemy powiedzieć o Zakopanem, chociaż skorelowanie opadów w tym czasie też się ujemne. Dokładne obliczenia dla Zakopanego, na podstawie tabeli 3 mają postać:

$$r = \frac{\text{cov}(P, t)}{\sqrt{\text{var}(P) \cdot \text{var}(t)}} = \frac{-5332}{\sqrt{649976 \cdot 1462,5}} \approx -0,173;$$

$H_0: \rho = 0$ wobec alternatywy $H_1: \rho < 0$ przy $\alpha = 0,05$

$$t_{\text{emp}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} = \frac{-0,173}{\sqrt{1-(-0,173)^2}} \sqrt{26-2} \approx -0,8605.$$

Ponieważ $t_{\text{emp}} = -0,8605 > -1,7109 = t_{\alpha}$, statystyka empiryczna nie trafia do obszaru krytycznego, dlatego na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 , że zmienne losowe nie są skorelowane. Tę różnicę zdarzeń w Warszawie i Zakopanem tłumaczymy tym, że w różnych miejscowościach opady kształtują się różnie. Okres 26 lat wystarczył dla Warszawy, aby wykazać istotne zmniejszenie się sumy opadów rocznych. Jest to zjawisko niepożądane, ale dla Zakopanego okres ten jest być może za krótki. Zaskoczeniem dla autora jest dobra zgodność terminów ekstremów opadów w Warszawie i Zakopanem mimo pokazanej między nimi odległości i różnicy wzniesień.

ZAKOŃCZENIE

Wprowadzony do hydrologii model wielomianu trygonometrycznego okazał się równie wdzięczny w estymacji jego parametrów jak zwyczajny wielomian. Mimo że zawiera wiele parametrów, wszystkie z nich są w estymacji separowane. Nie wymagają – jak w innych modelach krzywoliniowych – uciążliwych optymalizacji komputerowych.

Jego możliwości wyrównawcze są bardzo duże – można go połączyć z dowolną postacią trendu, a opracowanie numeryczne mieści się w możliwościach kalkulatora. Ta cecha predysponuje go do wprowadzenia w nauczaniu podstawowym studentów. Zamierzeniem autora jest opracowanie średnich miesięcznych opadów w określonym czasie dla każdej stacji pomiarowej. Jest to możliwe przy wykorzystaniu prac magisterskich. Dysponując tymi opracowaniami cząstkowymi, można wtedy podać jeden wzór dla średnich opadów miesięcznych w każdej miejscowości Polski, z uwzględnieniem jej położenia geograficznego i wysokości n.p.m. Takie opracowanie mogłoby służyć badaniom perspektywnym zmierzającym do ustalenia, czy ten bardzo ważny parametr hydrologiczny ulega w dłuższym czasie istotnym zmianom w całej Polsce.

PIŚMIENNICTWO

- Bac S., Koźmiński G., Rojek M., 1993. Agrometeorologia. PWN Warszawa.
- Byczkowski A., 1996. Hydrologia. Wydawnictwo SGGW Warszawa.
- Ciepielowski A., 1999. Podstawy gospodarowania wodą. Wydawnictwo SGGW Warszawa.
- Dębski K., 1970. Hydrologia. Arkady Warszawa.
- Karczmarek Z., 1970. Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności Warszawa.
- Lambor J., 1971. Hydrologia inżynierska. Arkady Warszawa.
- Loranc H., 2000. Studia nad 220-letnią (1779–1998) serią temperatury powietrza w Warszawie oraz ocena jej wiekowych tendencji. Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej Warszawa.
- Łykowski B., Madany R. 1986. Materiały do ćwiczeń z agrometeorologii. Wydawnictwo SGGW–AR Warszawa.
- Ozga-Zielińska M., Brzeziński J., 1994. Hydrologia stosowana. PWN Warszawa.
- Radomski Cz., 1977. Agrometeorologia. PWN Warszawa.
- Smolik S., 1995. Uproszczona procedura estymacji modelu wahań okresowych. Przegl. Stat. 3–4, 449–457.
- Smolik S., 1995. Opis standardowego roku opadowego wybranej miejscowości. Mat. Sympozjum „Monitorowanie i modelowanie procesów hydrologicznych w zmieniającym się środowisku”, Pionki, SGGW Warszawa, 71–78.
- Smolik S., 1996. Standardowy rok opadowy i termiczny Krakowa i Olsztyna. Wiad. IMiGW 4, 101–110.
- Smolik S., 1999. Przydatność opracowań statystycznych klimatu dla rolnictwa. Wiad. IMiGW 2, 33–41.
- Smolik S., 2011. Estymacja parametrów szeregu Fouriera i ich praktyczne zastosowania. SGGW, Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, 12(2), 322–332.

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 18.12.2013